חלק א': שאלות פתוחות – $35+35=70$ נקודות

<u>שאלה 1</u> [35 נקודות]

נגדיר יחס R מעל $Z\times Z$ באופן הבא:

א. $\forall\ (a,b),\ (c,d)\in Z\times Z\ :\ (\ (a,b)R(c,d)\ \leftrightarrow\ a\le c\ \wedge\ a+b\le c+d\ )$

ב. [10 נק'] הוכיחו ש$(Z\times Z,R)$ היא קס"ח.

ג. [5 נק'] האם $(Z\times Z,R)$ קס"מ? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית מנומקת.

ד. [10 נק'] תהי $A=\{-1,1,2\}$. ציירו את דיאגרמת הסה עבור $(\mathrm{A}\times\mathrm{A},\mathrm{R})$.

ה. [10 נק'] רשמו במפורש את השרשרת הארוכה ביותר (אם יש כמה, רשמו אחת מהן) ואת האנטי-שרשרת הארוכה ביותר (אם יש כמה, רשמו אחת מהן) ורשמו מה האורך ומה הרוחב של $(\mathrm{A}\times\mathrm{A},\mathrm{R})$.

<u>פתרון:</u>

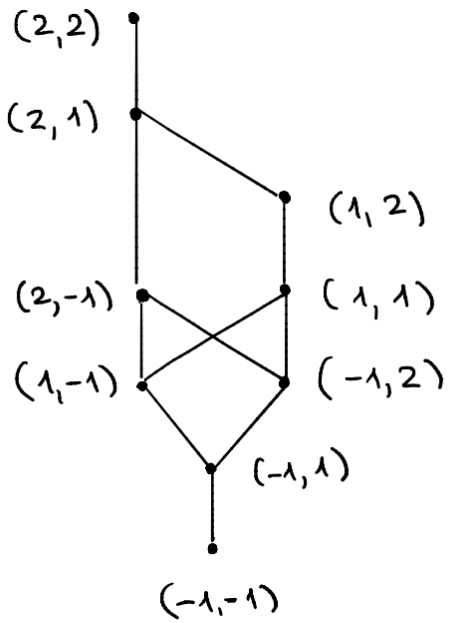
א. <u>רפלקסיבי</u>: יהי $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. מתקיים $a\le a\ \wedge a+b\le a+b$ ולכן $(a,b)\ll(a,b)$.

<u>אנטי-סימטרי</u>: יהיו $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. נניח שמתקיים $(a,b)\ll(c,d)\ \wedge\ (c,d)\ll(a,b)$ ונוכיח $(a,b)=(c,d)$.
מההנחה $(a,b)\ll(c,d)\ \wedge\ (c,d)\ll(a,b)$ נובע כי $(a\le c\wedge a+b\le c+d)\wedge(c\le a\wedge c+d\le a+b)$. מכך ש-$a\le c\wedge c\le a$ נסיק כי $a=c$ ואם נציב זאת בתנאי $a+b\le c+d\wedge c+d\le a+b$ נקבל ש-$b=d$ ולכן $(a,b)=(c,d)$ כנדרש.

<u>טרנזיטיבי</u>: יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ונניח שמתקיים $(a,b)\ll(c,d)\ \wedge\ (c,d)\ll(e,f)$. נוכיח כי $(a,b)\ll(e,f)$. מההנחה $(a,b)\ll(c,d)\ \wedge\ (c,d)\ll(e,f)$ נובע כי $(a\le c\wedge a+b\le c+d)\wedge(c\le e\wedge c+d\le e+f)$. מטרנזיטיביות היחס "$\le$" מסיקים כי $(a\le e\wedge a+b\le e+f)$ ולכן (לפי הגדרת היחס $\ll$) מתקיים $(a,b)\ll(e,f)$ כנדרש.

ב. הקבוצה אינה קס"מ שכן עבור $(1,5),(3,1)$ לא מתקיים $(1,5)\ll(3,1)$ וכן לא מתקיים $(3,1)\ll(1,5)$.

ג. דיאגרמת הסה של $(\mathrm{A}\times\mathrm{A},\mathrm{R})$ היא:



ד. השרשרת הארוכה ביותר היא: $\{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

אנטי-שרשרת הארוכה ביותר היא: $\{(1,-1),(-1,2)\}$.

אורך $(A\times A,R)$ שווה 7.

רוחב $(A\times A,R)$ שווה 2.

<u>שאלה 2</u> [35 נקודות]

א. [20 נק'] תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן.

הוכיחו כי מתקיימת ההכלה : $(A\times B)\cup(B\times A)\subseteq(A\cup B)\times(A\cup B)$.

האם גם ההכלה ההפוכה נכונה? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

ב. [15 נק'] הוכיחו <u>ללא שימוש בטבלת אמת</u> את השקילות הלוגית הבאה :

$$p\wedge(q\uparrow r)\equiv(p\to q)\uparrow(p\to r)$$

פתרון:

א. יהי $(x,y)\in(A\times B)\cup(B\times A)$ איבר כלשהו. אזי

$$(x,y)\in(A\times B)\cup(B\times A)\Leftrightarrow_{\text{def.of }\cup}(x,y)\in(A\times B)\vee(x,y)\in(B\times A)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow_{\text{def.of cartesian product}}(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in B\wedge y\in A)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow_{\text{פיצול}}(x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee y\in A)\wedge(y\in B\vee x\in B)\wedge(y\in B\vee y\in A)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow_{p\wedge q\Rightarrow p}(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in B\vee y\in A)\Leftrightarrow_{\text{def.of }\cup}x\in A\cup B\wedge y\in A\cup B\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow_{\text{def.of cartesian product}}(x,y)\in(A\cup B)\times(A\cup B).$$

ולכן מתקיים: $(A\times B)\cup(B\times A)\subseteq(A\cup B)\times(A\cup B)$.

<u>דוגמא נגדית</u>:

$$A=\{1\},B=\{2\}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{c}A\cup B=\{1,2\},\quad A\times B=\{(1,2)\},\quad B\times A=\{(2,1)\},\\(A\cup B)\times(A\cup B)=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\},\\(A\times B)\cup(B\times A)=\{(1,2),(2,1)\}.\end{array}$$

ב.

$$p\wedge(q\uparrow r)\equiv p\wedge\neg(q\wedge r)\equiv_{\text{DeMorgan}}p\wedge(\neg q\vee\neg r)\equiv_{\text{distributivity}}(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg r)\equiv_{\neg(\neg a)\equiv a}$$
$$\equiv\neg(\neg((p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg r)))\equiv_{\text{DeMorgan}}\neg(\neg(p\wedge\neg q)\wedge\neg(p\wedge\neg r))\equiv_{\text{DeMorgan}}$$
$$\equiv\neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r))\equiv_{a\to b\equiv\neg a\vee b}\neg((p\to q)\wedge(p\to r))\equiv(p\to q)\uparrow(p\to r)$$

חלק ב': שאלות ברירה – $5\times 6=30$ נקודות

1. [6 נק'] יהיה A פסוק מורכב הבנוי מפסוקים אטומיים a, b, c.

נתון כי צורת ה-DNF השלמה של A מכילה 2 פסוקיות "וגם".

אם $\neg A\vee a$ טאוטולוגיה ו-$A\wedge b$ סתירה, אז צורת ה-CNF השלמה של $\neg A$ היא:

א. $(a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b\vee\neg c)\wedge(a\vee\neg b\vee c)\wedge(a\vee\neg b\vee\neg c)\wedge(\neg a\vee\neg b\vee c)\wedge(\neg a\vee\neg b\vee\neg c)$

ב. $(a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b\vee\neg c)\wedge(a\vee\neg b\vee c)\wedge(a\vee\neg b\vee\neg c)\wedge(\neg a\vee b\vee c)\wedge(\neg a\vee\neg b\vee\neg c)$

ג. $\boxed{(\neg a\vee b\vee c)\wedge(\neg a\vee b\vee\neg c)}$

ד. $(\neg a\vee\neg b\vee c)\wedge(a\vee b\vee\neg c)$

ה. $(a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b\vee\neg c)$

<u>פתרון</u>

התשובה הנכונה היא ג'

נבנה את טבלת האמת הבאה:

a	b	c	A	$\neg A$
T	T	T	**F**	**T**
T	T	F	**F**	**T**
T	F	T	**T**	**F**
T	F	F	**T**	**F**
F	T	T	F	**T**
F	T	F	F	**T**
F	F	T	F	**T**
F	F	F	F	**T**

מכיוון שנתון ש-$\neg A \vee a$ טאוטולוגיה, בכל מקום בו a שקרי, $\neg A$ חייב להיות אמיתי (צבע אדום בטבלה), ולכן בשורות האלו A שיקרי. מהנתון ש-$A \wedge b$ סתירה נסיק שבכל מקום בו b אמיתי, A חייב להיות שקרי (צבע כחול בטבלה).

נתון שבצורת ה-DNF של הפסוק A יש שתי פסוקיות, ולכן בשתי השורות הנותרות A הוא אמיתי (ירוק בטבלה).

כעת נמלא את העמודה האחרונה ונקרא מתוכה את צורת ה-CNF של $\neg A$. שתי השורות הרלוונטיות הן 3 ו-4, וצורת ה-CNF הדרושה היא: $(\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$.

2. [6 נק'] הנוסח השקול לוגית לפסוק

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{N}\left(\left(\exists y \in \mathbb{N}\left(y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x\right)\right) \rightarrow x \notin P\right)\right)$$

הוא

א. $\exists x \in \mathbb{N}\left(\left(\forall y \in \mathbb{N}\left(y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x\right)\right) \rightarrow x \in P\right)$

ב. $\boxed{\exists x \in \mathbb{N}\left(\left(\exists y \in \mathbb{N}\left(y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x\right)\right) \wedge x \in P\right)}$

ג. $\exists x \in \mathbb{N}\left(\left(\forall y \in \mathbb{N}\left(y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x\right)\right) \wedge x \in P\right)$

ד. $\exists x \in \mathbb{N}\left(\left(\forall y \notin \mathbb{N}\left(y \mid x \wedge y \neq 1 \wedge y \neq x\right)\right) \rightarrow x \in P\right)$

ה. $\exists x \in \mathbb{N}\left(\left(\exists y \notin \mathbb{N}\left(y \mid x \vee y \neq 1 \vee y \neq x\right)\right) \wedge x \in P\right)$

3. [6 נק'] איזו מהטענות הבאות **לא** בהכרח נכונה לכל שתי קבוצות A, B?

א. אם $|P(A)\times P(B)|=1$ אז $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב. אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $|P(A)\times P(B)|=1$

ג. $|P(A)\times P(B)|=1$ אם ורק אם $A\cup B=\varnothing$

ד. אם $P(A\setminus B)=P(A\Delta B)$ אז $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ה. אם $|P(A)\times P(B)|=1$ אז $P(A\cup B)=P(A\times B)$

פתרון:

א. טענה נכונה:

$|P(A)\times P(B)|=1$ מתקיים אם"ם $|P(A)|=|P(B)|=1$ אם"ם $A=B=\varnothing$.

כידוע, $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אם"ם $A\subseteq B$ או $B\subseteq A$.

לכן אם $|P(A)\times P(B)|=1$ אז $A=B=\varnothing$ ולכן $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב. **טענה לא נכונה**: $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ לא גורר $|P(A)\times P(B)|=1$ משום שאם $A=B=\{1\}$ אזי $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אך $|P(A)\times P(B)|=2\cdot 2=4\neq 1$.

ג. **טענה נכונה**:

כפי שראינו בסעיף א, $|P(A)\times P(B)|=1$ אם"ם $A=B=\varnothing$. וזה מתקיים אם"ם $A\cup B=\varnothing$.

ד. **טענה נכונה**:

$$P(A\setminus B)=P(A\Delta B) \Leftrightarrow A\setminus B=A\Delta B \Leftrightarrow B\subseteq A \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$$

ה. **טענה נכונה**:

כפי שראינו בסעיף א', $|P(A)\times P(B)|=1$ אם"ם $A=B=\varnothing$.

לכן אם $|P(A)\times P(B)|=1$ אז $A\times B=A\cup B=\varnothing$ ולכן $P(A\cup B)=P(A\times B)$.

4. [6 נק'] יהיו $P(x,y), Q(x,y)$ פרדיקטים עם תחומי הגדרת המשתנים $D_x=D_y\neq\varnothing$.

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. $\exists x\forall y:\left(P(x,y)\vee Q(x,y)\right)\equiv\left(\exists x\forall y:P(x,y)\right)\vee\left(\exists x\forall y:Q(x,y)\right)$

ב. $\forall x\forall y:\left(P(x,y)\vee Q(x,y)\right)\equiv\left(\forall x\forall y:P(x,y)\right)\vee\left(\forall x\forall y:Q(x,y)\right)$

ג. $\exists x\exists y:\left(P(x,y)\to Q(x,y)\right)\equiv\left(\exists x\exists y:P(x,y)\right)\to\left(\exists x\exists y:Q(x,y)\right)$

ד. $\boxed{\exists x\exists y:\left(P(x,y)\to Q(x,y)\right)\equiv\left(\forall x\forall y:P(x,y)\right)\to\left(\exists x\exists y:Q(x,y)\right)}$

ה. $\exists x\forall y:\left(P(x,y)\to Q(x,y)\right)\equiv\left(\exists x\forall y:P(x,y)\right)\to\left(\exists x\forall y:Q(x,y)\right)$

5. [6 נק'] נגדיר יחס S מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\forall(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}:\left((a,b)S(c,d)\ \leftrightarrow\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right).$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

א. S הוא יחס שקילות מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ומתקיים: $[(2,5)]_S=[(5,2)]_S$

ב. S הוא יחס אנטי-סימטרי מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

ג. $\boxed{S \text{ הוא יחס שקילות מעל } \mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ ומתקיים: } [(1,2)]_S=\{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:d=2c\}}$

ד. S אינו יחס שקילות מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

ה. S הוא יחס שקילות מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ומתקיים: $[(1,2)]_S=\{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:c=2d\}$

<u>פתרון:</u>

קל לבדוק (בדקו!) כי כל הדרישות של יחס שקילות מתקיימות מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות מעל $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) . ולכן הטענה <u>בסעיף ד</u>' **אינה נכונה.**

הטענה <u>בסעיף א</u>' **אינה נכונה** כי הרי $[(2,5)]_S\neq[(5,2)]_S$. זאת כיוון ש- $(2,5)\in[(2,5)]_S$ אך $(2,5)\notin[(5,2)]_S$ משום ש- $\frac{2}{5}\neq\frac{5}{2}$.

S אינו יחס אנטי- סימטרי שכן מתקיים $(1,2)S(2,4)$ וגם $(2,4)S(1,2)$ אבל $(1,2)\neq(2,4)$.

לכן הטענה <u>בסעיף ב</u>' **אינה נכונה**.

מתקיים:

$$[(1,2)]_S=\left\{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\frac{1}{2}=\frac{c}{d}\right\}=\{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:d=2c\}$$

לכן הטענה <u>בסעיף ג</u>' **נכונה** <u>ובסעיף ה</u>' **לא נכונה**.